Aditivna dekompozicija hipergeometričnih členov

Mitja Luštrek

21. junij 2004

1 Uvod

Hipergeometrični člen je zaporedje $T(n)$, za katero velja, da je $\frac{ET(n)}{T(n)}$ racionalna funkcija za dovolj velike n; $Ef(n)$ pomeni $f(n+1)$. Vsota takega zaporedja je:

$$T_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \tag{1}$$

$T(n)$ se torej da izraziti kot:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n} T(k) - \sum_{k=0}^{n-1} T(k) = \Delta T_1(n) \tag{2}$$

$\Delta f(n)$ pomeni $Ef(n) - f(n)$. Kadar je $T_1(n)$ hipergeometrični člen, je hipergeometrični člen $T(n)$ seštevljiv (*summable*). $T_1(n)$, ki zadošča enačbi 2, se lahko iz $T(n)$ izračuna z Gosperjevim algoritmom. Sicer pa se $T(n)$ lahko razbije na seštevljivi del $T_1(n)$ in neseštevljivi (*non-summable*) del $T_2(n)$:

$$T(n) = \Delta T_1(n) + T_2(n) \tag{3}$$

Če naj bo tako razbitje minimalna aditivna dekompozicija hipergeometričnega člena $T(n)$, mora $T_2(n)$ biti minimalen. To pomeni, da mora v izrazu 4 biti imenovalec $V(n)$ najmanjše možne stopnje.

$$\frac{ET_2(n)}{T_2(n)} = F(n)\frac{EV(n)}{V(n)} \tag{4}$$

Minimalna aditivna dekompozicija hipergeometričnega člena se izračuna z algoritmom Abramova, ki je opisan v članku Abramov in Petkovšek (2002), Rational Normal Forms and Minimal Decomposition of Hypergeometric Terms, Journal of Symbolic Computation 33, 521-543. V nadaljevanju je opisana implementacija tega algoritma v Mathematici. Vsa sklicevanja na števlike strani se nanašajo na omenjeni članek.

2 Program

AdditiveDecomposition[T_, n_]

Vhod: člen T in njegova spremenljivka n.
Izhod: multiplikativni predstavitvi členov T_1 in T_2 (več o multiplikativni predstavitvi pri funkciji Multi), pri čemer je $\Delta T_1 + T_2$ minimalna aditivna dekompozicija T.

To je vrhnja funkcija, ki poišče multiplikativno predstavitev T in nato z funkcijo HgAddDec izračuna njegovo minimalno aditivno dekompozicijo.

AdditiveDecompositionGosper[T_, n_]

Vhod: člen T in njegova spremenljivka n.
Izhod: multiplikativni predstavitvi členov T_1 in T_2, pri čemer je $\Delta T_1 + T_2$ minimalna aditivna dekompozicija T.

Namen te funkcije je enak kot AdditiveDecomposition, le da najprej uporabi Gosperjev algoritem, če ta ne uspe, pa Dterm.

HgAddDec[D_, U_, n0_, n_]

Vhod: multiplikativna predstavitev (D, U, n_0) člena T in njena spremenljivka n.
Izhod: multiplikativni predstavitvi členov T_1 in T_2, pri čemer je $\Delta T_1 + T_2$ minimalna aditivna dekompozicija T.

Rabi se v funkciji AdditiveDecomposition.
Opis na str. 541.

SumOfTerms[D1_, U1_, n1_, D2_, U2_, n2_, n_]

Vhod: multiplikativni predstavitvi (D_1, U_1, n_1) in (D_2, U_2, n_2) podobnih členov T_1 in T_2 ter njuna spremenljivka n.
Izhod: multiplikativna predstavitev člena $T_1 + T_2$.

Hipergeometrična člena T_1 in T_2 sta si podobna, če obstaja racionalna funkcija R, da velja $T_1(n) = R(n)T_2(n)$ za dovolj velike n.
Ta funkcija se uporabi v primeru, da je hipergeometrični člen, katerega dekompozicija se išče, seštevljiv.
Rabi se v funkciji HgAddDec.
Opis na str. 530.

Dpol[F_, V_, n0_, n_]

Vhod: multiplikativna predstavitev (F, V, n_0) člena T in njena spremenljivka n; za $F = \frac{f_1}{f_2}$ in $V = \frac{v_1}{v_2}$ velja, da je v_2 p-prost, $v_2 \perp E^{-h} f_1, v_2 \perp E^h f_2$ za $\forall h \geq 0$, F je p-reducirana in V je polinom.
Izhod: multiplikativna predstavitev člena T_1, za katerega velja $T = \Delta T_1$, če obstaja, sicer pa 0.

Polinom p je p-prost (*shift-free*), če $p \perp E^k p$ za $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Racionalna funkcija R je p-reducirana (*shift-reduced*), če $R = a \oslash b$ in $a \perp E^k b$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$.
Ta funkcija se uporabi v primeru, da je hipergeometrični člen, katerega dekompozicija se išče, seštevljiv.
Rabi se v funkciji HgAddDec.
Opis na str. 541.

Multi[T_, n_]

Vhod: člen T in njegova spremenljivka n.
Izhod: multiplikativna predstavitev člena T.

Če velja $T(n) = V(n) \prod_{k=n_0}^{n-1} F(k)$ za $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ in V nima polov za $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$, potem je (F, V, n_0) multiplikativna predstavitev člena T.
Ker od uporabnika ni pričakovati, da bo kot vhod podal multiplikativno predstavitev člena, se uporabi ta funkcija.
Rabi se v fukcijah AdditiveDecomposition in AdditiveDecompositionGosper.
Izračun poteka po izreku 3 na str. 528.

AlmostRNF[R_, x_]

Vhod: Neničelna racionalna funkcija R in njena spremenljivka x.
Izhod: (zr, s, u, v), pri čemer je (z, r, s, u, v) racionalna normalna oblika R.

Če velja $R = z\frac{r}{s}\frac{E(u/v)}{u/v}$ in $r \perp E^k s$ za $\forall k \in \mathbb{Z}$, potem je (z, r, s, u, v) racionalna normalna oblika R.
Rabi se v funkcijah SumOfTerms in Multi.
Opis na str. 525.

DeMulti[F_, V_, n0_, n_]

Vhod: Multiplikativna predstavitev(F, V, n_0) člena T in njena spremenljivka n.
Izhod: Člen T.

Uporablja se pri interpretaciji rezultatov, ker nekatere funkcije vračajo multiplikativne predstavitve členov.
Izračun preprosto sledi definiciji multiplikativne predstavitve, ki je opisana pri funkciji Multi.

Dterm[D_, U_, n0_, n_]

Vhod: Multiplikativna predstavitev (D, U, n_0) člena T in njena spremenljivka n; D je p-reducirana.
Izhod: Multiplikativni predstavitvi členov T_1 in T_2, za katera velja $T = \Delta T_1 + T_2$; kadar $T_2 \neq 0$, takrat $\frac{ET_2}{T_2} = \frac{F(EV)}{V}$, pri čemer za $F = \frac{f_1}{f_2}$ in $V = \frac{v_1}{v_2}$ velja, da je v_2 p-prost, $v_2 \perp E^{-h} f_1$ in $v_2 \perp E^h f_2$ za $\forall h \geq 0$.

Ta funkcija izračuna minimalno aditivno dekompozicijo T, če T ni seštevljiv.
Rabi se v funkciji AdditiveDecompositionGosper in HgAddDec.
Opis na str. 535.

AboveZeroPole[R_, n_]

Vhod: Funkcija R spremenljivke n.
Izhod: Število, ki je večje od vseh ničel in polov R, če obstajajo (in jih je moč najti), sicer pa 0.

Rabi se v funkcijah SumOfTerms, Dpol, Multi in Dterm.

Dcert[D_, U_, n_]

Vhod: Racionalni funkciji D in U, kjer je (D, U) stroga racionalna normalna oblika neke racionalne funkcije.
Izhod: Racionalne funkcije U_1, F in V, za katere velja, da če $F = 0$, potem $U = D(EU_1) - U_1$, sicer pa $\frac{F(EV)}{V} = \frac{D(EU_2)}{U_2}$, pri čemer $U_2 = U - D(EU_1) + U_1$; za $F = \frac{f_1}{f_2}$ in $V = \frac{v_1}{v_2}$ velja, da je v_2 p-prost, $v_2 \perp E^{-h} f_1$ in $v_2 \perp E^h f_2$ za $\forall h \geq 0$.

Racionalna normalna oblika se lahko namesto kot (z, r, s, u, v) zapiše tudi kot (D, U), pri čemer je $D = z\frac{r}{s}$ in $U = \frac{u}{v}$. Stroga racionalna normalna oblika pomeni, da $r \perp uEv$ in $s \perp Euv$. Ta funkcija vsebuje jedro izračuna aditivne dekompozicije.
Rabi se v funkcijah HgAddDec in Dterm.
Opis na str. 534, upoštevani so popravki, ki jih je predlagal Qing-Ho Hou.

WriteAs[U2_, ut2_, qt_, n_]

Vhod: racionalna funkcija U_2, polinoma $\tilde{u}_2$ in $\tilde{q}$ ter njihova spremenljivka n.
Izhod: polinoma $\tilde{a}$ in $\tilde{b}$, tako da velja $U_2 = \frac{\tilde{a}}{\tilde{u}_2}\frac{\tilde{b}}{\tilde{q}}$.

Rabi se v funkciji Dcert.

Pump[f_, g_, n_]

Vhod: polinoma f in g ter njuna spremenljivka n; $f|g$.
Izhod: polinoma $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$, tako da $f|\tilde{f}$, $\forall q : q|\tilde{f} \wedge q$ nerazcepen $\Rightarrow q|f$, $\tilde{f}\tilde{g} = g$ in $\tilde{f} \perp \tilde{g}$.

Rabi se v funkciji Dcert.
Opis na str. 533.

Dis[a_, b_, x_]

Vhod: Neničelna polinoma a in b ter njuna spremenljivka x.
Izhod: Disperzija $dis(a, b)$.

Disperzija $dis(a, b)$ je največji $n \in \mathbb{N}$, tako da imata $a(x)$ in $b(x+n)$ nekonstanten skupni delitelj, če obstaja, sicer pa -1.
Rabi se v funkciji Dcert.
Definicija na str. 529.